Prof. Dr. Alfred Toth

Kategorien aus Objekten und Spuren aus Kategorien

1. In einem gewissen Sinne könnte man sagen, die Kategorietheorie elimniere die Objektvorstellung der Mengentheorie und ersetze sie durch die Abbildungen zwischen ihnen. Man stelle sich vor: Zwei Liebende, A und B, es besteht also eine Relation zwischen ihnen. Wie wäre es, wenn man diese Relation einfach zwischen den beiden herausheben und von ihnen (weitgehend) unabhängig machen könnte? Seriöser steht es bei MacLane: „Da eine Kategorie aus Pfeilen besteht, liesse sich unser Thema auch als Behandlung des Problemes auffassen, wie man ohne Elemente auskommen und statt ihrer Pfeile benutzen kann“ (1972, S. iii).

2. Da die semiotische Kategorietheorie auf der Basis der Peirceschen Zeichenrelation

ZR = (M, O, I)

und also ohne Nullzeichen eingeführt wurde, gibt es in der entsprechenden kategorialen semiotischen Matrix weder indizierte noch nicht-indizierte Leerkategorien (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.):

$$\left(\begin{array}{|c|ccc}\hline — & \alpha & \beta\alpha & id_1 \\ — & id_2 & \beta & \alpha° \\ — & \beta° & id_3 & \alpha°\beta° \\ \hline\end{array}\right)$$

3. Demgegenüber basiert die semiotische Spurentheorie (vgl. Toth 2009a und zahlreiche Nachfolgearbeiten) auf der durch das Nullzeichen erweiterten Peirceschen Zeichenrelation

ZR* = (∅, M, O, I),

es gibt in der entsprechenden Spurenmatrix Abbildungen von und nach indizierten Nullzeichen:

$$\begin{pmatrix} \varnothing_M & M_O & M_I & M_M \\ \varnothing_O & O_O & O_I & O_M \\ \varnothing_I & I_O & I_I & I_M \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} M_\varnothing & O_\varnothing & I_\varnothing \\ M_O & O_O & I_O \\ M_I & O_I & I_I \\ M_M & O_M & I_M \end{pmatrix}^T$$

Mit T ist wie übliche die Transponierte der 4 × 3-Matrix bezeichnet. Es gelten also die folgenden Dualisationsbeziehungen

$\times(\varnothing_M) = M_\varnothing$
$\times(\varnothing_O) = O_\varnothing$
$\times(\varnothing_I) = I_\varnothing$

4. Kategorien werden aus Objekten und den Abbildungen zwischen ihnen wie folgt definiert (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.):

$1 \to 2$	$\equiv$	α	$3 \to 2$	$\equiv$	$\beta°$	$1 \to 1$	$\equiv$	id1
$2 \to 1$	$\equiv$	$\alpha°$	$1 \to 3$	$\equiv$	$\beta\alpha$	$2 \to 2$	$\equiv$	id2
$2 \to 3$	$\equiv$	β	$3 \to 1$	$\equiv$	$\alpha°\beta°$	$3 \to 3$	$\equiv$	id3

Dabei werden also nur 2 Basisabbildungen, α und β, benötigt, die restlichen sind Kompositen, Konversen und die üblichen Identitäten.

5. Spuren können aus Kategorien auf zweierlei Weise gewonnen werden. Erstens durch die in Toth (2009a) eingeführte Spurenschreibweise X_Y, worin X die Domäne eines Morphismus und Y die Spur der Codomäne des Morphismus angibt. Auf diese Weise ist es möglich, zwischen richtigen (z.B. M_O) und falschen Spuren (z.B. M_M, M_I) zu unterscheiden. Zweitens kann man das bereits in Toth (2008) eingeführte Substanz-Eliminierungsverfahren verwenden, eine Notation, die neben den drei Pfeilen →, ←, ↓ nur die drei semiotischen Kategoriensymbole 1, 2, 3 verwendet. Die nachstehende Tabelle gibt beide Verfahren:

Kategorien → Spuren:

—		$\varnothing_M$	≡	**∅→**	‖	—		$\varnothing_O$	≡	**→∅←**
id1	≡	M_M	≡	1↓	‖	α°	≡	O_M	≡	2→
α	≡	M_O	≡	←1→	‖	id2	≡	O_O	≡	2↓
βα	≡	M_I	≡	←1	‖	β	≡	O_I	≡	←2

—		$\varnothing_I$	≡	**∅←**
α°β°	≡	I_M	≡	3→
β°	≡	I_O	≡	←3→
id3	≡	I_I	≡	3↓

Durch Fettdruck werden die hier neu dazukommenden Null-Abbildungen gekennzeichnet.

6. Im ersten Fall werden also aus den semiotischen Objekten reine Abbildungen gewonnen, das ist der Bereich der semiotischen Kategorietheorie. Im zweiten Fall hingegen werden aus den semiotischen Kategorien auf zwei verschiedenen Wegen Spuren gewonnen; Spuren sind, grob gesagt, **gerichtete Objekte**. Dieser Begriff stammt ursprünglich aus der Architekturtheorie (vgl. Toth 2009b) und wird hiermit neu in die Mathematik eingeführt. Somit gilt, dass die mathematischen Begriffe Kategorie und gerichtetes Objekt in gewissem Sinne kontradiktorisch, in gewissem Sinne aber komplementär sind. Weitere Studien werden folgen.

Bibliographie

MacLane, Saunders, Kategorien. Berlin 1972

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Die Auslöschung der semiotischen Substanz. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Ausloesch.%20sem.%20Subst..pdf (2008)

Toth, Alfred, Kategoriale Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009a)

Toth, Alfred, Gerichtete Objekte. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Gerichtete%20Objekte.pdf (2009b)

22.10.2009