Prof. Dr. Alfred Toth

Multiset-Relationen

1. In Cantor-Mengentheorien sind Mengen wie z.B.

$M_1 = \{0, 1, 2, 3\}$

$M_2 = \{0, 0, 1, 2, 2, 2, 3\}$

gleich, d.h. es ist $M_1 = M_2$, da mehrfach auftretende Elemente irrelevant sind. In der "Multi-Mengentheorie" (Theory of Multisets) gilt hingegen $M_1 \neq M_2$ (vgl. z.B. Singh et al. 2007). Im folgenden wird gezeigt, daß die Einführung von Multisets besonders für Dichotomien mit Einbettungsoperatoren von großem Nutzen sind (vgl. zuletzt Toth 2015a, b).

2. Unterscheidbarkeit und Nicht-Unterscheidbarkeit bei Cantor-Relationen

Die logische Basisdichotomie

$L = [0, 1]$,

die also eine Relation über der als Wahrheitswerte interpretierten Menge $M = (0, 1)$ definiert, ist hinsichtlich ihrer Relata nicht-unterscheidbar, da sie einen leeren Rand haben

$R[0, 1] = \emptyset$.

Diese Leerheit des Randes gehört zum für die 2-wertige Logik bindenden Gesetz des Tertium non datur, denn z.B. kann ein dritter Wert in einer 3-wertigen Logik

$L = [0, ½, 1]$

als Rand $R[0, 1] = ½$ definiert werden.

Wie wir allerdings bereits in Toth (2014) gezeigt hatten, kann man Ränder auch ohne zusätzliche Werte einführen, und zwar durch Einbettungsoperatoren. Sei

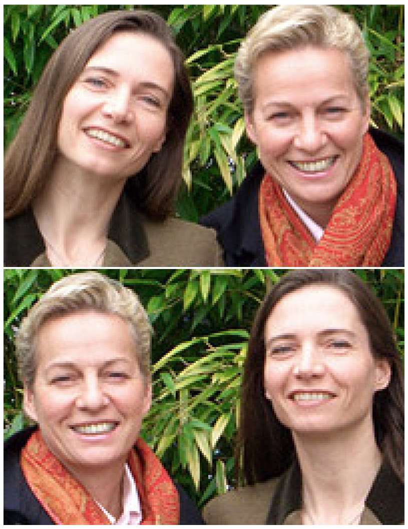
$E: \emptyset \rightarrow [\emptyset]$,

dann bekommen wir für L = [0, 1] das folgende Quadrupel von Relationen

L_1 = [0, [1]] L_2 = [[1], 0]

L_3 = [[0], 1] L_4 = [1, [0]]

mit $L_2 = L_1^{-1}$ und $L_4 = L_3^{-1}$ sowie R[0, [1]] ≠ R[[0], 1] ≠ R[1, [0]] ≠ R[[1], 0].



Wir haben hier also die Einbettung selbst, die als Drittes, freilich als Nicht-Wert, fungiert, d.h. eine Differenz anstatt eines Wertes, die zwischen den beiden Gliedern der Dichotomien vermittelt.

3. Unterscheidbarkeit und Nicht-Unterscheidbarkeit bei Multi-Relationen

In L = [0, 1] kann der eine Wert nicht mehr als die Spiegelung des anderen Wertes sein, denn es gilt ja

$\neg 0 = 1$

$\neg 1 = 0$

und daher

$\neg\neg 0 = 1$

$\neg\neg 1 = 0.$

Man sieht allerdings bereits auf metasemiotischer Ebene, bei den sog. Litotes ("nicht uncool"), daß die Selbstaufhebung von Operatoren durch Iteration ein Unsinn ist. Entsprechend kann der Operator bei eingebetteten Relata nicht mehr funktionieren, d.h. es ist z.B. $\neg 0 \neq \neg[0] \neq \neg[[0]]$, usw. Wenn wir also die rein semiotische, nicht aber ontische Differenz zwischen den Werten 0 und 1 in $L = [0, 1]$ beseitigen und stattdessen schreiben

$L = [0, 0]$

$L = [1, 1]$,

dann werden die Relata 0 und 1 doppeldeutig, insofern wir jeweils zwei Möglichkeiten haben

$L = [0, 0] = [0]$ $\qquad$ $L = [1, 1] = [1]$

$L = [0, 0] \neq [0]$ $\qquad$ $L = [1, 1] \neq [1]$,

d.h. im jeweils ersten Fall, wo also Gleichheit besteht, handelt es sich um Cantor-Relationen, aber im jeweils zweiten Fall, wo also Nicht-Gleichheit besteht, handelt es sich um Multi-Relationen. Wegen der Möglichkeit der Ungleichheit mehrfach auftretender Relata erhalten wir nun auch dort Quadrupel und nicht nur Paare von Relationen, wo nur ein Relatum anstatt zwei Relata vorliegen

$L_1 = [0, [0]]$ $\qquad$ $L_2 = [[0], 0]$

$L_3 = [[0], 0]$ $\qquad$ $L_4 = [0, [0]]$,

d.h. es gibt hier die Möglichkeiten

$L_1 = L_4$ oder $L_1 \neq L_4$

$L_2 = L_3$ oder $L_2 \neq L_3$.

Literatur

Singh, D., Ibrahim M., Yohanna, T., Singh, J.N., An Overview of the Applications of Multisets. In: Novi Sad Journal of Mathematics 37/2 (2007), S. 73-92

Toth, Alfred, Einbettungsoperatoren. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Einbettungsoperator und Elementschaft. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Einbettungsstufen von Seinsfunktionen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

19.4.2015