Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotische Homologiegruppen

1. Gegeben sei ein mathematisches Objekt, z.B. ein topologischer Raum X. Man kann nun einen Kettenkomplex C(X) definieren, der Information über X enthält. Unter einem Kettenkomplex versteht man eine Sequenz von abelschen Gruppen oder Moduln C_0, C_1, C_2, ..., die durch Homomorphismen ∂_n: $C_n \rightarrow C_{n-1}$ verbunden sind. Man hat also

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

wobei 0 die triviale Gruppe und bedeutet und $C_i \equiv 0$ für i < 0 (Hatcher 2002). Unter Homologie versteht man nun, informell ausgedrückt, eine Methode, um eine Sequenz von abelschen Gruppen mit einem bestimmten mathematischen Objekt zu verbinden.

2. Wie bereits in Toth (2006, S. 96 ff.) gezeigt, gibt es mehrere Möglichkeiten, topologische Räume innerhalb der Semiotik zu definieren. Einen trivialen semiotischen Raum stellt die Menge der Primzeichen S = {1, 2, 3} dar (Bense 1980). Anderseits wurde ebenfalls in Toth (2006, S. 40 ff.) gezeigt, dass sich über S drei abelsche semiotische Gruppen definieren lassen. Wir führen im folgenden diese 3 semiotischen Gruppen im Detail vor und zeigen anhand eines vereinfachten semiotischen Kettenkomplexes, dass die drei semiotischen Gruppen drei semiotische Homologiegruppen bilden.

2.1. Die Gruppe (S, $\circ_1$)

1. Abgeschlossenheit: 1 $\circ_1$ 1 = 2; 1 $\circ_1$ 2 = 2 $\circ_1$ 1 = 3; 1 $\circ_1$ 3 = 3 $\circ_1$ 1 = 1; 2 $\circ_1$ 2 = 1; 2 $\circ_1$ 3 = 3 $\circ_1$ 2 = 2; 3 $\circ_1$ 3 = 3.
2. Assoziativität: 1 $\circ_1$ (2 $\circ_1$ 3) = (1 $\circ_1$ 2) $\circ_1$ 3 = 2; 2 $\circ_1$ (3 $\circ_1$ 2) = (2 $\circ_1$ 3) $\circ_1$ 2 = 1, 3 $\circ_1$ (3 $\circ_1$ 1) = (3 $\circ_1$ 3) $\circ_1$ 1 = 1, usw.
3. Einselement: 1 $\circ_1$ 3 = 3 $\circ_1$ 1 = 1; 2 $\circ_1$ 3 = 3 $\circ_1$ 2 = 2; 3 $\circ_1$ 3 = 3, d.h. e = 3.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 2$, denn $1 \circ_1 2 = 3$; $2^{-1} = 1$, denn $2 \circ_1 1 = 3$; $3^{-1} = 3$ = const.

Sei σ_1: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_1 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_1 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.2)
σ_1 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.1)
σ_1 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.3)
σ_1 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.1)
σ_1 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.3)
σ_1 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.3 2.3)
σ_1 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.1)
σ_1 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.3)
σ_1 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.3 2.3)
σ_1 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 1.3 2.3)

2.2. Die Gruppe (S, $\circ_2$)

(PZ, $\circ_2$) wurde bereits von Bogarín (1992) als Gruppe nachgewiesen, nachdem Bense kurz darauf hingewiesen hatte, dass “die kleine semiotische Matrix […] der Cayleyschen Gruppentafel entspricht” (1986, S. 43).

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_2 1 = 3$; $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2$; $2 \circ_2 2 = 2$; $2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3$; $3 \circ_2 3 = 1$.
2. Assoziativität: $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2$; $2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3$, $3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $2 \circ_2 2 = 2$; $3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$, d.h. e = 2.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 3$, denn $1 \circ_2 3 = 2$; $2^{-1} = 2$ = const., $3^{-1} = 1$, denn $3 \circ_2 1 = 2$.

Sei σ_2: $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_2 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_2 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.3)
σ_2 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.2)
σ_2 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.1)

σ_2 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.2)
σ_2 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.1)
σ_2 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.1 3.1)
σ_2 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.2)
σ_2 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.1)
σ_2 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.1 3.1)
σ_2 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.1 2.1 3.1)

2.3. Die Gruppe (PZ, $\circ_3$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_3 1 = 1$; $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$; $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$; $2 \circ_3 2 = 3$; $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$; $3 \circ_3 3 = 2$.
2. Assoziativität: $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$; $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$, $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_3 1 = 1$; $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$; $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$, d.h. e = 1.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 1$ = const., $2^{-1} = 3$, denn $2 \circ_3 3 = 1$, $3^{-1} = 2$, denn $3 \circ_3 2 = 1$.

Sei σ_3: 2 $\rightarrow$ 3, 3 $\rightarrow$ 2, dann erzeugt σ_3 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_3 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.1)
σ_3 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.3)
σ_3 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.2)
σ_3 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.1 3.3 1.3)
σ_3 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.3 1.2)
σ_3 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.2 1.2)
σ_3 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.3 3.3 1.3)
σ_3 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.3 3.3 1.2)
σ_3 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.3 3.2 1.2)
σ_3 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 3.2 1.2)

Alle drei Gruppen sind offensichtlich kommutativ, d.h. abelsch, d.h. sie erfüllen unsere Voraussetzung.

3. Die Folge der drei abelschen semiotischen Gruppen $C(S_1)$, $C(S_2)$ und $C(S_3)$ sind nun durch die folgenden Homomorphismen verbunden:

∂_1: $C(S_1) \rightarrow C(S_2) := 1 \rightarrow 2 \ / \ 2 \rightarrow 1$
∂_n: $C(S_1) \rightarrow C(S_3) := 1 \rightarrow 3 \ / \ 3 \rightarrow 1$
∂_n: $C(S_2) \rightarrow C(S_3) := 2 \rightarrow 3 \ / \ 3 \rightarrow 1$,

d.h. aber, dass nun alle semiotischen Voraussetzungen für eine Darstellung von S als Homologiegruppe vorhanden sind.

Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3,1980
Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986
Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfrt 2006

13.12.2010