Prof. Dr. Alfred Toth

Vorüberlegungen zu einem semiotischen Garbenbegriff

1. „Sheaves provide a tool for passing from local to global situations and a good deal of mathematics (and physics) revolves around such questions. Sheaves allow us to study objects that exist locally but not globally, such as the holomorphic functions on the Riemann sphere or the orientation on a Möbius strip, and the cohomology of sheaves measures in some sense the obstruction to passing from local to global" (Kashiwara/Schapira 2006, S. v).

Technisch betrachtet, ist eine Garbe (von abelschen Gruppen über X) einfach ein Tripel $\underline{\underline{G}}$ = (G, π, X), bestehend aus zwei topologischen Räumen G und X sowie einem (lokalen) Homöomorphismus, d.h. eine Abbildung, die jede offene Teilmenge aus G auf eine offene Teilmenge aus X abbildet. Garben bestehen aus Halmen, die wiederum aus Keimen bestehen.

2. Wenn wir nun einen Blick auf die Zeichenklassen werfen, so können wir sie hinsichtlich des Unterschiedes von „Lokalität" und „Globalität" in 3 Gruppen einteilen:

1. Monadische. Bei ihnen genügt die Angabe eines Bezugs, um die ganze Zeichenklasse zu rekonstruieren, z.B.:

(1.1) → (3.1 2.1 1.1)

2. Dyadische. Bei ihnen müssen zwei Bezüge gegeben sein, z.B.:

(2.1 1.2) → (3.1 2.1 1.2)

(2.2 1.2) → (3.1 2.2 1.2)

↘ (3.2 2.2 1.2)

3. Triadische. Wie im monadischen Fall, gibt es auch hier nur eine Zeichenklasse, d.h. die Abbildung ist eindeutig:

(3.1 2.2 1.3) → (3.1 2.2 1.3).

Wie man sieht, enthält also die dyadische Gruppe 8 Zeichenklassen und damit strukturell verschiedene Fälle, vgl. etwa

(3.1 2.1) → (3.1 2.1 1.1)

→ (3.1 2.1 1.2)

→ (3.1 2.1 1.3)

(3.1 1.3) → (3.1 2.1 1.3)

→ (3.1 2.2 1.3)

→ (3.1 2.3 1.3)

Andererseits ist nur in dem bereits erwähnten Fall eine Zeichenklasse durch Angabe einer Monade eindeutig bestimmt, vgl.

(1.3) → (3.1 2.1 1.3)

→ (3.1 2.2 1.3)

→ (3.1 2.3 1.3)

→ (3.2 2.2 1.3)

→ (3.2 2.3 1.3)

→ (3.3 2.3 1.3).

Wir können diese verwirrenden Beispiele anhand der folgenden Tabelle vereinfachen und setzen zu jeder Monade und jeder Dyadenkombination als Index ein Mass, das wir **Lokalitätsgrad** nennen wollen. Es besagt also, wie viele mögliche Zeichenklassen daraus rekonstruiert werden können. Wie man sieht, ist L = [1, 6]:

Monaden:

1.1_1, 1.2_3, 1.3_6

2.1_3, 2.2_4, 2.3_3

3.1_6, 3.2_3, 3.3_1

Interessanterweise erhalten wir damit folgendes

Theorem: Für alle Monaden mit Lokalitätsgrad L gilt: $(a.b)_L = (a.b)^{o}_{L}$.

Dyaden:

$(2.1\ 1.1)_1$, $(2.1\ 1.2)_1$, $(2.1\ 1.3)_1$

$(2.2\ 1.2)_2$, $(2.2\ 1.3)_2$

$(2.3\ 1.3)_3$

$(3.1\ 2.1)_3$, $(3.1\ 2.2)_2$, $(3.1\ 2.3)_1$

$(3.2\ 2.2)_2$, $(3.2\ 2.3)_1$

$(3.3\ 2.3)_1$

$(3.1\ 1.1)_1$, $(3.1\ 1.2)_2$, $(3.1\ 1.3)_3$

$(3.2\ 1.2)_1$, $(3.2\ 1.3)_2$

$(3.3\ 1.3)_1$

3. Gehen wir also von der allgemeinen Definition

$\underline{\underline{G}} = (G, \pi, X)$

aus, so besteht im Falle einer semiotischen Garbe die Menge G aus der bzw. den betreffenden Monaden und Dyaden und X aus der Menge der aus ihnen rekonstruierbaren Zeichenklassen, wobei π die Abbildung von G → X ist, also etwa

π: $(3.1\ 1.1)_1 \rightarrow (3.1\ 2.1\ 1.1)_1$,

wo π eineindeutig ist, oder bei

π: $(2.1)_3 \rightarrow (3.1\ 2.1\ 1.1)_1$, wo der Lokalitätsgrad 3 → 1 ist (da zwei weitere mögliche Zeichenklassen ausgeschlossen wurden). Theoretisch können die Lokalitätsgrade also wie folgt variieren:

6 → 6, 6 → 5, 6 → 4, ..., 1 → 1,

wodurch eine abnehmende semiotische Globalität bzw. zunehmende semiotische Lokalität definiert wird. Die beiden einzigen eindeutigen Fälle

(1.1) → (3.1 2.1 1.1)

(3.3) → (3.3 2.3 1.3)

könnte man als lokal bzw. global beschränkte semiotische Kategorien bezeichnen. Da

$\underline{\underline{H}} = \pi^{-1}(x), x \in X$

Halm genannt wird, so kann man also die inversen semiotischen Abbildungen, d.h. die oben mit Lokalitätsgraden versehenen Monaden und Dyaden als semiotische Halme und die Zeichenklassen (und Realitätsthematiken) als semiotische Garben bezeichnen. Da man die Elemente von Halmen als Keime bezeichnet, sind im monadischen Falle also die semiotischen Halme mit ihren semiotischen Keimen identisch, und im dyadischen Falle bilden die Monaden, aus denen die Dyaden zusammengesetzt sind, die semiotischen Keime dieser semiotischen Halme.

Bibliographie

Kashiwara, Masaki/Schapira, Pierre, Categories and Sheaves. Springer 2006

Kultze, R., Garbentheorie. Stuttgart 1970

10.12.2010