Prof. Dr. Alfred Toth

Ein verallgemeinertes Operatorenpaar für die Semiotik

1. Dass man die 10 Peirceschen Zeichenklassen und Realitätsthematiken in der Form verschiedener Verbände darstellen kann, die obere und untere Schranken besitzen, hat bereits Berger (1976) gezeigt.

2. Erné (1982, S. 86 ff.) hat nun darauf hingewiesen, dass man das Konzept der oberen und unteren Schranken dazu benutzen kann, ein Operatorenpaar einzuführen, mit dem allgemeine Relationen von A nach B, und zwar unabhängig von der ursprünglichen Symbolik, definiert werden können. Wir setzen X als die Menge der triadischen und Y als die Menge der trichotomischen Peirce-Zeichen fest. Ferner sei $Z \subseteq X$ und $W \subseteq Y$, dann definiert man

$Z\uparrow := \{y \in Y: xRy \text{ für jedes } x \in Z\}$

$Z\downarrow := \{x \in X: xRy \text{ für jedes } y \in W\}$

Ferner seien folgende Vereinfachungen vereinbart:

$x\uparrow = \{x\}\uparrow$

$y\downarrow = \{y\}\downarrow$

Das Operatorenpaar $\uparrow, \downarrow$ bildet nun eine sog. Galois-Korrespondenz; vgl. die folgenden Beispiele für allgemeine Relationen, welche direkt aus Erné (1982, S. 87) entnommen sind:

$$W \subseteq Z \Longrightarrow Z^{\uparrow} \subseteq W^{\uparrow}, \quad (W, Z \subseteq X)$$

$$W \subseteq Z \Longrightarrow Z_{\downarrow} \subseteq W_{\downarrow}, \quad (W, Z \subseteq Y)$$

$$W \subseteq Z_{\downarrow} \Longleftrightarrow Z \subseteq W^{\uparrow} \quad (W \subseteq X,\ Z \subseteq Y),$$

und hieraus folgt unmittelbar

4.6. LEMMA: *Für jede Relation* $R \subseteq X \times Y$ *gilt*

$$Z \subseteq Z^{\uparrow}{}_{\downarrow} \quad \textit{und} \quad Z^{\uparrow} = Z^{\uparrow}{}_{\downarrow}{}^{\uparrow} \quad (Z \subseteq X),$$

$$Z \subseteq Z_{\downarrow}{}^{\uparrow} \quad \textit{und} \quad Z_{\downarrow} = Z_{\downarrow}{}^{\uparrow}{}_{\downarrow} \quad (Z \subseteq Y).$$

Insbesondere sind die Abbildungen

$$\Delta : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X\ ;\ Z \longmapsto Z^{\uparrow}{}_{\downarrow} \quad \textit{und}$$

$$\nabla : \mathfrak{P}Y \longrightarrow \mathfrak{P}Y\ ;\ Z \longmapsto Z_{\downarrow}{}^{\uparrow}$$

Hüllenoperatoren, und folglich sind

$$\mathfrak{X}_{\Delta} = \{ Z^{\uparrow}{}_{\downarrow} : Z \subseteq X \} = \{ W_{\downarrow} : W \subseteq Y \} \quad \textit{und}$$

$$\mathfrak{X}_{\nabla} = \{ W_{\downarrow}{}^{\uparrow} : W \subseteq Y \} = \{ Z^{\uparrow} : Z \subseteq X \}$$

zueinander anti-isomorphe Hüllensysteme. Darüberhinaus gilt

$$(\bigcup \mathfrak{z})^{\uparrow} = \bigcap \{ Z^{\uparrow} : Z \in \mathfrak{z} \} \quad (\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{P}X), \quad \textit{und}$$

$$(\bigcup \mathfrak{z})_{\downarrow} = \bigcap \{ Z_{\downarrow} : Z \in \mathfrak{z} \} \quad (\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{P}Y).$$

Bibliographie

Berger, Wolfgang, Zur Algebra der Zeichenklassen. In: Semiosis 4, 1976, S. 20-24

Erné, Marcel, Einführung in die Ordnungstheorie. Mannheim 1982

Toth, Alfred, Grundriss einer ordnungstheoretischen Semiotik. In: European Journal for Semiotic Studies 8, 1996, S. 503-526

1.2.2011