

**Prof. Dr. Alfred Toth**

## **Einbettungsoperatoren**

1. Die 2-wertige aristotelische Logik beruht auf einer heterarchischen Austauschrelation der Form

$$L = [P, N]$$

$$L = [N, P],$$

denn für die der Position (P) und der Negation (N) zugeordneten Wahrheitswerte W und F gilt bekanntlich

$$\neg W = F$$

$$\neg \neg W = W$$

$$\neg \neg F = F.^1$$

Daher läßt sich der Negationsoperator als 2-wertiger Reflektor

$$\times W = F$$

$$\times F = W$$

darstellen.

2. In Sonderheit verbietet also der logische Dritzensatz nicht nur die Existenz eines dritten logischen Wertes, sondern auch hierarchische Austauschrelationen der Form

$$W^* = [W, F]$$

$$F^* = [F, W].$$

---

<sup>1</sup> Die Antwort auf Wittgensteins Frage (Tractatus 5.44) , ob im Ausdruck  $\neg \neg p$  p bejaht oder  $\neg p$  verneint wird, lautet natürlich, daß sich doppelte 2-wertige Operatoren selbst aufheben, vgl. die Körperaddition  $1 + 1 = 0$ .

Läßt man nämlich Selbstenthaltung zu – dazu muß das Fundierungsaxiom der Zermelo-Fraenkelschen Mengentheorie außer Kraft gesetzt werden –, dann bekommen wir statt einer doppelten eine vierfache Opposition

$$L = [P, [N]]$$

$$L = [[P], N]$$

$$L = [N, [P]]$$

$$L = [[N], P]$$

und also

$$W^* = [W, [F]]$$

$$W^* = [[W], F]$$

$$F^* = [F, [W]]$$

$$F^* = [[F], W].$$

Ganz offensichtlich sind diese Strukturen, die nur mit den zwei logischen Werten W und F operieren, dennoch nicht 2-wertig, denn ein bislang undefinierter, rechtsmehrdeutiger Einbettungsoperator

$$E := [x, y] \rightarrow \{[x, [y]], [[x], y], [y, [x]], [[y], x]\}$$

fungiert quasi anstelle eines dritten logisches Wertes, indem er ein Tertium datur in die 2-wertige aristotelische Logik einführt. Da die Logik für jeden dyadischen Operator "Wertfunktionen", richtig: Kombinationen von Wahrheitswerten (WW, WF, FW, FF) kennt, ordnet also der Einbettungsoperator E diesen Wertkombinationen folgende Strukturen für jede der 16 dyadischen logischen Operatoren zu

$$E(WW) \rightarrow \{[W, [W]], [[W], W]\}$$

$$E(WF) \rightarrow \{[W, [F]], [[W], F], [F, [W]], [[F], W]\}$$

$$E(FW) \rightarrow \{[F, [W]], [[F], W], [W, [F]], [[W], F]\}$$

$$E(FF) \rightarrow \{[F, [F]], [[F], F]\}.$$

3. Daß die Einführung eines Einbettungsoperators zur relationalen, aber nicht materialen Erzeugung von logischer Mehrwertigkeit qua Aufhebung des Tertium non datur-Gesetzes von größter Bedeutung für die Arithmetik ist, die ja natürlich auf der 2-wertigen Logik beruht, dürfte unmittelbar einleuchten. Nehmen wir als Beispiel

$$N = (1, 2, 3),$$

d.h. den Anfang der natürlichen Zahlen, der vermöge der Peano-Axiome in der Form

$$N = (|, ||, |||)$$

darstellbar ist, weshalb Günther (1991) von der "totalen Relationslosigkeit" der Zahl gesprochen hatte. Da Bense (1975, S. 167 ff.) die Zeichenzahlen, später auch "Primzeichen" genannt (Bense 1981, S. 17 ff.) explizit mit Hilfe der Peano-Axiome eingeführt hatte, widerspricht diese Einführung der späteren Definition Benses (1979, S. 53), die Mengeninklusionsketten der Form

$$Z = (1 \subset 2 \subset 3)$$

voraussetzt. (Die semiotische Drittheit schließt Zweit- und Erstheit, und die Zweitheit schließt Erstheit ein. Bense, a.a.O., sprach daher ausdrücklich vom Zeichen als einer "Relation über Relationen".) Es gilt somit selbstverständlich

$$N \neq Z,$$

d.h. die Zeichenzahlen sind NICHT mit Hilfe der Peano-Axiome einführbar, da für natürliche Zahlen keine Mengeninklusionen gelten. Jede natürliche Zahl  $n > 1$  besitzt lediglich einen Vorgänger  $V(n) = (n-1)$  und einen Nachfolger  $N(n) = (n+1)$ , schließt aber keineswegs die Menge aller ihrer Vorgänger ein, wie dies die Zeichenzahlen tun. Bense selbst (1981, S. 26) hatte zwar den Begriff der Relationszahl nur für die drittheitlich fungierende Zeichenzahlen reserviert, aber selbstverständlich stellen alle drei Zeichenzahlen Relationszahlen dar, die somit von Peanozahlen strikt zu trennen sind.

## Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Günther, Gotthard, Idee und Grundriß einer nicht-Aristotelischen Logik. 3. Aufl. Hamburg 1991

8.11.2014