Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Relevanz des Collatz-Problems für die Semiotik

1. Die Collatz-Konjektur, die unter zahlreichen Namen (z.B. Syracuse problem) auftaucht und von der Erdős sagte, die Mathematik sei noch nicht reif, um dieses Problem zu lösen (vgl. Pickover 2001, S. 116-118), besagt folgendes: Nimm eine natürliche Zahl n. Falls sie gerade ist, dividiere sie durch 2, um (n/2) zu bekommen. Falls sie ungerade ist, multipliziere sie mit 3 und addiere 1, um (3n + 1) zu bekommen:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\, a_{n-1} & \text{for } a_{n-1} \text{ even} \\ 3\, a_{n-1} + 1 & \text{for } a_{n-1} \text{ odd} \end{cases}$$

Das Besondere ist nun, dass, je nach der Grösse des gewählten n, jede Zahlen-folge 1 erreichen wird. Beispiele für die ersten natürlichen Zahlen (aus. Wolfram o.J.):

a_0	$a_0, a_1, a_2, \ldots$
1	1
2	2, 1
3	3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
4	4, 2, 1
5	5, 16, 8, 4, 2, 1
6	6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Als Beispiele für grösseres n stehe n = 27:

{ 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, **7288**, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, ***9232***, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 }

Anhand dieses Beispiels sieht man auch ein weiteres Charakteristikum der Collatz-Folgen: dass sie nämlich bis zu einer bestimmten Zahl ansteigen, um dann rapide abzufallen (für n = 27 ist es die kursiv markierte Zahl 9232).

2. Die wohl grösste Charakteristikum von Collatz-Folgen ist, dass sie, von der Folge für n = 4 abgesehen, alle auf die Folge

8, 4, 2, 1

enden. Diese Zahlen sind jedoch in der Topologie keine Unbekannten, denn der Satz von Hopf besagt folgendes:

Satz von Hopf: **Jede endlich-dimensionale, reelle kommutative Divisionsalgebra A = (V, ·) ist höchstens zweidimensional.**

Und der Satz von Kervaire und Milnor (1958) besagt:

Satz von Kervaire und Milnor: **Ist A eine endlich-dimensionale Divisionsalgebra über R, so ist die Dimension von A (als Vektorraum über R) gleich 1, 2, 4 oder 8.**

Der Zusammenhang mit Schiefkörpern ergibt sich durch den sog. Struktursatz von Mazur:

Struktursatz von Mazur: **Es sei A eine normierte, assoziative, reelle Divisionsalgebra. Dann ist A entweder zu R oder zu C oder zu H isomorph.**

Das sind aber, wie in Toth (2007, S. 78 ff.) ausführlich gezeigt wurde, genau jene Dimensionen, in denen Semiotiken überhaupt möglich sind bzw. Schiefkörper, zu denen Semiotiken isomorph sein können.

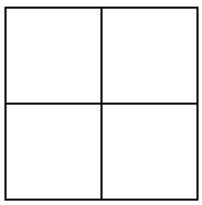
3. Die Endfolge *jeder* Collatz-Sequenz (d.h. auch derjenigen für n = 4)

4, 2, 1

gibt in Übereinstimmung mit Toth (2011) an, dass 1 Zeichen sich aus 2 Dyaden mit 4 Subdyaden zusammensetzt, wenn man davon ausgeht, dass das in Toth (2011) eingeführte dyadisch-tetravalente Zeichenmodell adäquater ist als das triadisch-trichotomisch-trivalente von Peirce:

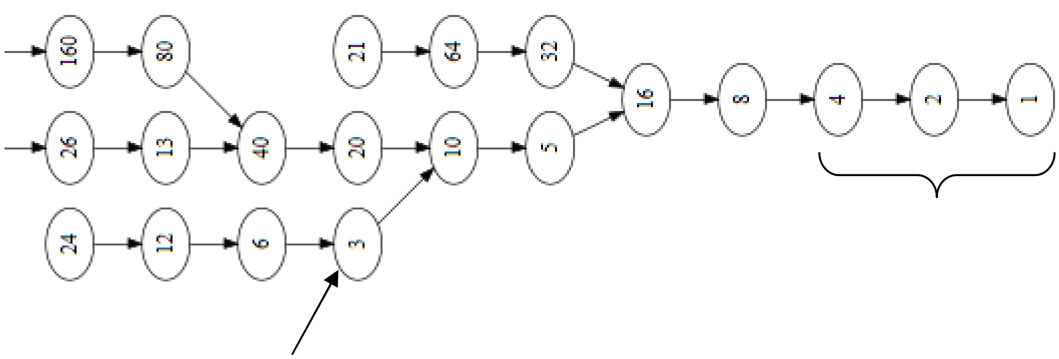
ZR(2,4) := ((3.a 0.b), (2.c 1.d)) mit a,…,d ∈ {0, 1, 2, 3},

die dessen modellhafte Grundstruktur



z.B. mit derjenigen des glossematischen Zeichen von Hjelmslev teilt, wo nicht nur zwischen Ausdruck und Inhalt, sondern zugleich zwischen Form und Substanz unterschieden wird.

Dagegen wird die 3, die für Peirce so charakteristische Trias, in allen Collatz-Folgen bereits sehr viel früher erreicht:



D.h. die 3 tritt als Teil der Sequenz auf, die erst noch auf die Endsequenz 4-2-1 hin entwickelt werden muss, sie ist also weder eine untere noch eine obere Grenze in dem Sinne, dass der Sequenzabschitt zwischen (3 / 20 /21) und der Endsequenz nur in dem obigen Beispiel, das die Orbits für n = 30 ohne n = 27 gibt, auftaucht, sonst aber (soweit bekannt) nicht. Kurz gesagt: Die 3 spielt überhaupt keine Rolle in der Collatz-Sequenz, wohl aber die 4, 2 und 1, und man erinnere sich, dass das wesentliche Argument dafür, dass in Toth (2011) das dyadisch-tetravalente Zeichenmodell eingeführt worden war, darin bestand, dem Interpretant nicht länger eine eigene semiotische Dimension zuzuweisen, da sich seine Funktion auf die Konnexbildung beschränkt, die von der dyadischen Reststruktur jedes Zeichens aus prädiktabel ist. (Da das neue Zeichenmodell von den Plätzen als auch von den Werten her tetravalent ist, tritt er als Drittheit natürlich trotzdem auf, aber eben nicht als Anlass, die dyadische Grundstruktur des Zeichens zu einer triadischen zu erweitern.)

Bibliographie

Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al., Zahlen. 3. Aufl. Springer 1992

Pickover, Clifford A., Wonders of Numbers. Oxford 2001

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Zur Charakteristik der dyadisch-tetravalenten Zeichenfunktion. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Charakt.%20dyadisch-tetravalent.pdf (2011)

Weisstein, Eric, Collatz Problem. In: http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html

18.5.2011