Prof. Dr. Alfred Toth

Der semiotische Begriff der Anwendung

1. „Angewandte" Semiotik bedeutet normalerweise und trivialerweise die Anwendung der theoretischen Semiotik (sofern man eine solche überhaupt kennen will). Meistens wird damit allerdings eine Pseudo-Semiotik bezeichnet, die keine theoretische Semiotik ist und mit dem Namen also der Mangel an formal-kontrollierbaren Strukturen, Prozessen und Systemen vertuscht.

Allerdings hat, was noch weniger bekannt ist, der Begriff „Anwendung" selbst auch innerhalb der theoretischen Semiotik eine Anwendung. Max Bense definierte ihn wie folgt: „Im Anschluss an eine von H.B. Curry gegebene (mathematisch orientierte) Definition von ‚Anwendung', danach es sich hierbei um eine ‚dyadische Verknüpfung', d.h. ‚Zuordnung' handele, ‚wodurch zu jedem geordneten Paar von Etwasen ein eindeutig bestimmtes Drittes zugeordnet wird', lässt sich die triadische Zeichenrelation über M, O und I auch als eine Anwendung, Anwendungsrelation bzw. Regel auffassen. Die Beziehung des Objektbezugs (M→O) innerhalb der triadischen Zeichenrelation M = R(M→O.→I) auf I kann insofern ‚Anwendung' heissen, als das im Objektbezug hergestellte, bezeichnete Objekt im Interpretanten in einen neuen Bezug, nämlich in einen kontextlichen (rhematischen, dicentischen oder argumentischen) Zusammenhang mit anderen Zeichen gebracht wird, der seinerseits die situationsabhängige und kommunikationsabhängige Wirksamkeit der Zeichen im ‚Netzwerk' bzw. im Kanal bedingt" (Bense/Walther 1973, S. 16).

2. Im folgenden wird vorgeschlagen, semiotische Anwendung dadurch zu formalsieren, dass die von Bense erwähnte dyadische Verknüpfung im Sinne einer gruppentheoretischen Verknüpfung gedeutet wird. Die Anwendung der Gruppentheorie auf die Semiotik, die übrigens von Bense selbst begründet wurde (vgl. Bense 1986, S. 43), empfiehlt sich deshalb, weil das Hauptaxiom der semiotischen Metaphysik besagt, dass nur das gegeben ist, was repräsentierbar ist (Bense 1981, S. 11). Aus diexem Axiom folgt das Lemma, dass „Zeichenmittel, Objekt und Interpretant in ein und derselben Welt sind" (Gfesser 1990, S. 139). Die Annahme apriorischer Objekte wird deshalb in der semiotischen Metaphysik Bensescher Prägung durch das Konzept der „Disponibilität" von Objekten ersetzt, die in eine Semiose eingehen und dadurch zu Meta-Objekten transformiert werden (Bense 1975, S. 45; 1967, S. 9). Wenn also zwei semiotische Elemente (Primzeichen, Subzeichen, Zeichen-

rümpfe, Zeichenklassen, Realitätsthematiken, Trichotomische Triaden usw.) miteinander verknüpft bzw. einander zugeordnet werden, so gewährleistet die semiotische Gruppentheorie gerade, dass das entstehende Dritte, das Verknüpfungsprodukt oder die Verknüpfungssumme, wieder Elemente der Gruppe ist, d.h. also semiotisch gesprochen, „in ein und derselben Welt" ist. Die folgende Darstellung folgt weitgehend Toth (2008b), wobei hier das Hauptgewicht auf die semiotischen Anwendungen, d.h. die Additionen (im Abelschen Falle) oder die Multiplikationen gelegt wird.

3. Eine (abgeschlossene) dyadische bzw. binäre Operation auf einer nichtleeren Menge G ist eine Abbildung α: G × G → G. Ein Gruppoid (G, ○) ist eine nichtleere Menge zusammen mit einer binären Operation. Seien L(a) und R(a) Translationen, so dass xL(a) = ax und xR(a) = xa für alle x ∈ G, d.h. L(a): G → G und R(a): G → G für jedes a ∈ G, dann verstehen wir unter einer Quasigruppe ein Gruppoid, deren Translationen bijektiv sind für alle a ∈ G. Ein Gruppoid ist kommutativ, wenn L(a) = R(a) für alle a ∈ G, und assoziativ, wenn R(a ○ b) = R(a)R(b) für alle a, b ∈ G. Assoziative Gruppoide heissen Halbgruppen. Eine Quasigruppe heisst ein Loop, wenn sie ein Einselement hat. Assoziative Loops heissen Gruppen, d.h. Gruppen sind Quasigruppen, welche vermöge ihrer Assoziativität ein Einselement haben. Wegen der Bijektivität von L(a) und R(a) gibt es inverse Abbildungen $L(a)^{-1}$ und $R(a)^{-1}$, mit deren Hilfe wir die folgenden binären Operationen definieren: $x\backslash y = yL(x)^{-1}$ und $x/y = xR(y)^{-1}$ für alle x, y ∈ G. Die Quasigruppen (G, \) und (G, /) nennen wir Konjugierte von (G, ○). Wenn wir F(a, b) = c schreiben anstatt a ○ b = c, dann erhalten wir: F(a, b) = c; F^{-1}(c, b) = a; ^{-1}F(a, c) = b; $^{-1}(F^{-1})$ (c, a) = b; $(^{-1}F)^{-1}$(b, c) = a; $(^{-1}(F^{-1}))^{-1}$(b, a) = c. Zu jeder Quasigruppe gibt es genau 6 solcher Parastrophen (Pflugfelder 1990, S. 43).

Gegeben sei die Menge PZ = {1, 2, 3} der Primzeichen und die Verknüpfung ○. Da wir eine Tafel herstellen können wie zum Beispiel:

○	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

ist (PZ, ○) eine Quasigruppe. Dann können wir die zugehörigen 6 Parastrophen (π_i) wie folgt darstellen:

$(\pi_1) = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = F \qquad (\pi_2) = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = F^{-1} \qquad (\pi_3) = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = {}^{-1}F$

$(\pi_4) = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = {}^{-1}(F^{-1}) \quad (\pi_5) = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = {}^{-1}(F)^{-1} \quad (\pi_6) = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = ({}^{-1}F^{-1}))^{-1}$

Quasigruppen werden in Form von Matrizen mit n^2 Elementen dargestellt (wobei n die Ordnung der Quasigruppe ist), die als Lateinische Quadrate bekannt sind, unter der Bedingung, dass keine zwei gleichen Elemente in derselben Zeile oder Kolonne stehen. Mit Hilfe der 6 Parastrophen erhalten wir dann genau 12 Quasigruppen, die sich in zwei Untergruppen einteilen lassen: in solche mit identischer Nebendiagonale und in solche mit identischer Hauptdiagonale.

Semiotische Quasigruppen mit identischer Nebendiagonale

$\circ_1$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

$\circ_2$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

$\circ_3$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$\circ_4$	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	3
3	1	3	2

$\circ_5$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

$\circ_6$	1	2	3
1	2	1	3
2	1	3	2
3	3	2	1

4. Gruppen

4.1. Die Gruppe (PZ, $\circ_1$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_1 1 = 2$; $1 \circ_1 2 = 2 \circ_1 1 = 3$; $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 2 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$.
2. Assoziativität: $1 \circ_1 (2 \circ_1 3) = (1 \circ_1 2) \circ_1 3 = 2$; $2 \circ_1 (3 \circ_1 2) = (2 \circ_1 3) \circ_1 2 = 1$, $3 \circ_1 (3 \circ_1 1) = (3 \circ_1 3) \circ_1 1 = 1$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$, d.h. e = 3.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 2$, denn $1 \circ_1 2 = 3$; $2^{-1} = 1$, denn $2 \circ_1 1 = 3$; $3^{-1} = 3$ = const.

Sei σ_1: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_1 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_1 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.2)
σ_1 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.1)
σ_1 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.3)
σ_1 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.1)
σ_1 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.3)
σ_1 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.3 2.3)
σ_1 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.1)
σ_1 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.3)
σ_1 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.3 2.3)
σ_1 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 1.3 2.3)

4.2. Die Gruppe (PZ, $\circ_2$)

(PZ, $\circ_2$) wurde bereits von Bogarín (1992) als Gruppe nachgewiesen, nachdem Bense kurz darauf hingewiesen hatte, dass "die kleine semiotische Matrix […] der Cayleyschen Gruppentafel entspricht" (1986, S. 43).

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_2 1 = 3$; $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2$; $2 \circ_2 2 = 2$; $2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3$; $3 \circ_2 3 = 1$.
2. Assoziativität: $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2$; $2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3$, $3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $2 \circ_2 2 = 2$; $3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$, d.h. e = 2.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 3$, denn $1 \circ_2 3 = 2$; $2^{-1} = 2$ = const., $3^{-1} = 1$, denn $3 \circ_2 1 = 2$.

Sei σ_2: $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_2 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_2 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.3)
σ_2 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.2)
σ_2 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.1)
σ_2 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.2)
σ_2 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.1)
σ_2 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.1 3.1)
σ_2 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.2)

σ_2 (3.2 2.2 1.3) → (1.2 2.2 3.1)
σ_2 (3.2 2.3 1.3) → (1.2 2.1 3.1)
σ_2 (3.3 2.3 1.3) → (1.1 2.1 3.1)

4.3. Die Gruppe (PZ, $\circ_3$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_3 1 = 1$; $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$; $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$; $2 \circ_3 2 = 3$; $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$; $3 \circ_3 3 = 2$.
2. Assoziativität: $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$; $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$, $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_3 1 = 1$; $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$; $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$, d.h. e = 1.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 1$ = const., $2^{-1} = 3$, denn $2 \circ_3 3 = 1$, $3^{-1} = 2$, denn $3 \circ_3 2 = 1$.

Sei σ_3: 2 → 3, 3 → 2, dann erzeugt σ_3 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_3 (3.1 2.1 1.1) → (2.1 3.1 1.1)
σ_3 (3.1 2.1 1.2) → (2.1 3.1 1.3)
σ_3 (3.1 2.1 1.3) → (2.1 3.1 1.2)
σ_3 (3.1 2.2 1.2) → (2.1 3.3 1.3)
σ_3 (3.1 2.2 1.3) → (2.1 3.3 1.2)
σ_3 (3.1 2.3 1.3) → (2.1 3.2 1.2)
σ_3 (3.2 2.2 1.2) → (2.3 3.3 1.3)
σ_3 (3.2 2.2 1.3) → (2.3 3.3 1.2)
σ_3 (3.2 2.3 1.3) → (2.3 3.2 1.2)
σ_3 (3.3 2.3 1.3) → (2.2 3.2 1.2)

Alle drei Gruppen sind offensichtlich kommutativ, d.h. abelsch.

5. Kommutative Quasigruppen

5.1. Die kommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_4$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_4 1 = 3$; $1 \circ_4 2 = 2 \circ_4 1 = 2$; $1 \circ_4 3 = 3 \circ_4 1 = 1$; $2 \circ_4 2 = 1$; $2 \circ_4 3 = 3 \circ_4 2 = 3$; $3 \circ_4 3 = 2$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_4 (2 \circ_4 3) = 1 \neq (1 \circ_4 2) \circ_4 3 = 3$; $3 \circ_4 (3 \circ_4 1) = 1 \neq (3 \circ_4 3) \circ_4 1 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_4 3 = 3 \circ_4 1 = 1$; $2 \circ_4 1 = 1 \circ_4 2 = 2$; $3 \circ_4 2 = 2 \circ_4 3 = 3$.

5.2. Die kommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_5$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_5 1 = 1$; $1 \circ_5 2 = 2 \circ_5 1 = 3$; $1 \circ_5 3 = 3 \circ_5 1 = 2$; $2 \circ_5 2 = 2$; $2 \circ_5 3 = 3 \circ_5 2 = 1$; $3 \circ_5 3 = 3$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_5 (2 \circ_5 3) = 1 \neq (1 \circ_5 2) \circ_5 3 = 3$; $3 \circ_5 (3 \circ_5 1) = 1 \neq (3 \circ_5 3) \circ_5 1 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_5 1 = 1$; $2 \circ_5 2 = 2$; $3 \circ_5 3 = 3$. (Weil hier jedes Element idempotent ist, ist (PZ, $\circ_5$) eine Steiner-Quasigruppe; vgl. Lindner und Evans 1977, S. 51 ff.).

5.3. Die kommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_6$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_6 1 = 2$; $1 \circ_6 2 = 2 \circ_6 1 = 1$; $1 \circ_6 3 = 3 \circ_6 1 = 3$; $2 \circ_6 2 = 3$; $2 \circ_6 3 = 3 \circ_6 2 = 2$; $3 \circ_6 3 = 1$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_6 (2 \circ_6 3) = 1 \neq (1 \circ_6 2) \circ_6 3 = 3$; $3 \circ_6 (3 \circ_6 1) = 1 \neq (3 \circ_6 3) \circ_6 1 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_6 2 = 2 \circ_6 1 = 1$; $2 \circ_6 3 = 3 \circ_6 2 = 2$; $3 \circ_6 1 = 1 \circ_6 3 = 3$.

Die drei Quasigruppen (PZ, $\circ_4$), (PZ, $\circ_5$) und (PZ, $\circ_6$) bilden also Loops, da sie Einselemente haben, wobei die entsprechenden Links- (a^λ) und Rechtsinversen (a^ρ) jeweils zusammenfallen.

6. Semiotische Quasigruppen mit identischer Hauptdiagonale

$\circ_7$	1	2	3
1	3	1	2
2	2	3	1
3	1	2	3

$\circ_8$	1	2	3
1	3	2	1
2	1	3	2
3	2	1	3

$\circ_9$	1	2	3
1	2	1	3
2	3	2	1
3	1	3	2

$\circ_{10}$	1	2	3
1	2	3	1
2	1	2	3
3	3	1	2

$\circ_{11}$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

$\circ_{12}$	1	2	3
1	1	3	2
2	2	1	3
3	3	2	1

61. Nichtkommutative Quasigruppen

6.1. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_7$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_7 1 = 3$; $1 \circ_7 2 = 1 \neq 2 \circ_7 1 = 2$; $1 \circ_7 3 = 2 \neq 3 \circ_7 1 = 1$; $2 \circ_7 2 = 3$; $2 \circ_7 3 = 1 \neq 3 \circ_7 2 = 2$; $3 \circ_7 3 = 3$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_7 (2 \circ_7 3) = 3 \neq (1 \circ_7 2) \circ_7 3 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_7 2 = 1 \neq 2 \circ_7 1 = 2$; $2 \circ_7 1 = 2 \neq 1 \circ_7 2 = 1$; $3 \circ_7 3 = 3$.

6.2. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_8$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_8 1 = 3$; $1 \circ_8 2 = 2 \neq 2 \circ_8 1 = 1$; $1 \circ_8 3 = 1 \neq 3 \circ_8 1 = 2$; $2 \circ_8 2 = 3$; $2 \circ_8 3 = 2 \neq 3 \circ_8 2 = 1$; $3 \circ_8 3 = 3$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_8 (3 \circ_8 2) = 3 \neq (1 \circ_8 3) \circ_8 2 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_8 3 = 1 \neq 3 \circ_8 1 = 2$; $2 \circ_8 3 = 2 \neq 3 \circ_8 2 = 1$; $3 \circ_8 3 = 3$.

6.3. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_9$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_9 1 = 2$; $1 \circ_9 2 = 1 \neq 2 \circ_9 1 = 3$; $1 \circ_9 3 = 3 \neq 3 \circ_9 1 = 1$; $2 \circ_9 2 = 2$; $2 \circ_9 3 = 1 \neq 3 \circ_9 2 = 3$; $3 \circ_9 3 = 2$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_9 (2 \circ_9 3) = 2 \neq (1 \circ_9 2) \circ_9 3 = 3$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_9 2 = 1 \neq 2 \circ_9 1 = 3$; $2 \circ_9 2 = 2$; $3 \circ_9 2 = 3 \neq 2 \circ_9 3 = 1$.

6.4. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_{10}$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_{10} 1 = 2$; $1 \circ_{10} 2 = 3 \neq 2 \circ_{10} 1 = 1$; $1 \circ_{10} 3 = 1 \neq 3 \circ_{10} 1 = 3$; $2 \circ_{10} 2 = 2$; $2 \circ_{10} 3 = 3 \neq 3 \circ_{10} 2 = 1$; $3 \circ_{10} 3 = 2$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_{10} (2 \circ_{10} 3) = 1 \neq (1 \circ_{10} 2) \circ_{10} 3 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_{10} 3 = 1 \neq 3 \circ_{10} 1 = 3$; $2 \circ_{10} 2 = 2$; $3 \circ_{10} 1 = 3 \neq 1 \circ_{10} 3 = 1$.

6.5. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_{11}$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_{11} 1 = 1$; $1 \circ_{11} 2 = 2 \neq 2 \circ_{11} 1 = 3$; $1 \circ_{11} 3 = 3 \neq 3 \circ_{11} 1 = 2$; $2 \circ_{11} 2 = 1$; $2 \circ_{11} 3 = 2 \neq 3 \circ_{11} 2 = 3$; $3 \circ_{11} 3 = 1$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $2 \circ_{11} (1 \circ_{11} 3) = 2 \neq (2 \circ_{11} 1) \circ_{11} 3 = 1$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_{11} 1 = 1$; $2 \circ_{11} 3 = 2 \neq 3 \circ_{11} 2 = 3$; $3 \circ_{11} 2 = 3 \neq 2 \circ_{11} 3 = 2$.

6.6. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, $\circ_{12}$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_{12} 1 = 1$; $1 \circ_{12} 2 = 3 \neq 2 \circ_{12} 1 = 2$; $1 \circ_{12} 3 = 2 \neq 3 \circ_{12} 1 = 3$; $2 \circ_{12} 2 = 1$; $2 \circ_{12} 3 = 3 \neq 3 \circ_{12} 2 = 2$; $3 \circ_{12} 3 = 1$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_{12} (2 \circ_{12} 3) = 2 \neq (1 \circ_{12} 2) \circ_{12} 3 = 1$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_{12} 1 = 1$; $2 \circ_{12} 1 = 2 \neq 1 \circ_{12} 2 = 3$; $3 \circ_{12} 1 = 3 \neq 1 \circ_{12} 3 = 2$.

Bei den sechs Quasigruppen (PZ, $\circ_7$) bis (PZ, $\circ_{12}$) gilt also $a^\lambda \neq a^\rho$, d.h. die entsprechenden Links- und Rechtsinversen fallen nicht zusammen.

7. Wenn wir die 6 Permutationen der paarweise verschiedenen Elemente von PZ anschauen, dann erzeugen

(1, 2, 3)	(2, 1, 3)
(1, 3, 2)	(1, 3, 2)
(2, 3, 1)	(1, 2, 3)

genau die 3 möglichen semiotischen Gruppen (PZ, $\circ_1$), (PZ, $\circ_2$) und (PZ, $\circ_3$), wie man leicht nachprüft.

Wenn wir hingegen die 27 Permutationen von nur je 2 Elementen aus PZ anschauen, dann erzeugen, wie im folgenden gezeigt wird,

(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)
(1, 1, 2)	(2, 1, 2)	(3, 1, 2)
(1, 1, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 3)
(1, 2, 1)	(2, 2, 1)	(3, 2, 1)
(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(3, 2, 2)

(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(3, 2, 3)
(1, 3, 1)	(2, 3, 1)	(3, 3, 1)
(1, 3, 2)	(2, 3, 2)	(3, 3, 2)
(1, 3, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)

genau die 9 möglichen semiotischen Quasigruppen (PZ, $\circ_4$) bis (PZ, $\circ_{12}$).

7.1. (1 2 3)
(1 1 1)

σ_4 (a.b c.d e.f) → (1.1 1.1 1.1), d.h. σ_4 transformiert jede Zeichenklasse in die Zeichenrelation (1.1 1.1 1.1).

7.2. (1 2 3)
(1 1 2)

σ_5 (3.1 2.1 1.1) → (2.1 1.1 1.1)
σ_5 (3.1 2.1 1.2) → (2.1 1.1 1.1)
σ_5 (3.1 2.1 1.3) → (2.1 1.1 1.2)
σ_5 (3.1 2.2 1.2) → (2.1 1.1 1.1)
σ_5 (3.1 2.2 1.3) → (2.1 1.1 1.2)
σ_5 (3.1 2.3 1.3) → (2.1 1.2 1.2)
σ_5 (3.2 2.2 1.2) → (2.1 1.1 1.1)
σ_5 (3.2 2.2 1.3) → (2.1 1.1 1.2)
σ_5 (3.2 2.3 1.3) → (2.1 1.2 1.2)
σ_5 (3.3 2.3 1.3) → (2.2 1.2 1.2)

7.3. (1 2 3)
(1 1 3)

σ_6 (3.1 2.1 1.1) → (3.1 1.1 1.1)
σ_6 (3.1 2.1 1.2) → (3.1 1.1 1.1)
σ_6 (3.1 2.1 1.3) → (3.1 1.1 1.3)
σ_6 (3.1 2.2 1.2) → (3.1 1.1 1.1)
σ_6 (3.1 2.2 1.3) → (3.1 1.1 1.3)
σ_6 (3.1 2.3 1.3) → (3.1 1.3 1.3)
σ_6 (3.2 2.2 1.2) → (3.1 1.1 1.1)
σ_6 (3.2 2.2 1.3) → (3.1 1.1 1.3)

σ_6 (3.2 2.3 1.3) → (3.1 1.3 1.3)
σ_6 (3.3 2.3 1.3) → (3.3 1.3 1.3)

7.4. (1 2 3)
(1 2 1)

σ_7 (3.1 2.1 1.1) → (1.1 2.1 1.1)
σ_7 (3.1 2.1 1.2) → (1.1 2.1 1.2)
σ_7 (3.1 2.1 1.3) → (1.1 2.1 1.1)
σ_7 (3.1 2.2 1.2) → (1.1 2.2 1.2)
σ_7 (3.1 2.2 1.3) → (1.1 2.2 1.1)
σ_7 (3.1 2.3 1.3) → (1.1 2.1 1.1)
σ_7 (3.2 2.2 1.2) → (1.2 2.2 1.2)
σ_7 (3.2 2.2 1.3) → (1.2 2.2 1.1)
σ_7 (3.2 2.3 1.3) → (1.2 2.1 1.1)
σ_7 (3.3 2.3 1.3) → (1.1 2.1 1.1)

7.5. (1 2 3)
(1 2 2)

σ_8 (3.1 2.1 1.1) → (2.1 2.1 1.1)
σ_8 (3.1 2.1 1.2) → (2.1 2.1 1.2)
σ_8 (3.1 2.1 1.3) → (2.1 2.1 1.2)
σ_8 (3.1 2.2 1.2) → (2.1 2.2 1.2)
σ_8 (3.1 2.2 1.3) → (2.1 2.2 1.2)
σ_8 (3.1 2.3 1.3) → (2.1 2.2 1.2)
σ_8 (3.2 2.2 1.2) → (2.2 2.2 1.2)
σ_8 (3.2 2.2 1.3) → (2.2 2.2 1.2)
σ_8 (3.2 2.3 1.3) → (2.2 2.2 1.2)
σ_8 (3.3 2.3 1.3) → (2.2 2.2 1.2)

7.6. (1 2 3)
(1 3 1)

σ_9 (3.1 2.1 1.1) → (1.1 3.1 1.1)
σ_9 (3.1 2.1 1.2) → (1.1 3.1 1.3)
σ_9 (3.1 2.1 1.3) → (1.1 3.1 1.1)

σ_9 (3.1 2.2 1.2) → (1.1 3.3 1.3)
σ_9 (3.1 2.2 1.3) → (1.1 3.3 1.1)
σ_9 (3.1 2.3 1.3) → (1.1 3.1 1.1)
σ_9 (3.2 2.2 1.2) → (1.3 3.3 1.3)
σ_9 (3.2 2.2 1.3) → (1.3 3.3 1.1)
σ_9 (3.2 2.3 1.3) → (1.3 3.1 1.1)
σ_9 (3.3 2.3 1.3) → (1.1 3.1 1.1)

7.7. (1 2 3)
(1 3 3)

σ_{10} (3.1 2.1 1.1) → (3.1 3.1 1.1)
σ_{10} (3.1 2.1 1.2) → (3.1 3.1 1.3)
σ_{10} (3.1 2.1 1.3) → (3.1 3.1 1.3)
σ_{10} (3.1 2.2 1.2) → (3.1 3.3 1.3)
σ_{10} (3.1 2.2 1.3) → (3.1 3.3 1.3)
σ_{10} (3.1 2.3 1.3) → (3.1 3.3 1.3)
σ_{10} (3.2 2.2 1.2) → (3.3 3.3 1.3)
σ_{10} (3.2 2.2 1.3) → (3.3 3.3 1.3)
σ_{10}(3.2 2.3 1.3) → (3.3 3.3 1.3)
σ_{10} (3.3 2.3 1.3) → (3.3 3.3 1.3)

7.8. (1 2 3)
(2 1 1)

σ_{11} (3.1 2.1 1.1) → (1.2 1.2 2.2)
σ_{11} (3.1 2.1 1.2) → (1.2 1.2 2.1)
σ_{11} (3.1 2.1 1.3) → (1.2 1.2 2.1)
σ_{11} (3.1 2.2 1.2) → (1.2 1.1 2.1)
σ_{11} (3.1 2.2 1.3) → (1.2 1.1 2.1)
σ_{11} (3.1 2.3 1.3) → (1.2 1.1 2.1)
σ_{11} (3.2 2.2 1.2) → (1.1 1.1 2.1)
σ_{11} (3.2 2.2 1.3) → (1.1 1.1 2.1)
σ_{11} (3.2 2.3 1.3) → (1.1 1.1 2.1)
σ_{11} (3.3 2.3 1.3) → (1.1 1.1 2.1)

7.9. $(1\ 2\ 3)$
$(2\ 1\ 2)$

σ_{12} (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (2.2 1.2 2.2)
σ_{12} (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (2.2 1.2 2.1)
σ_{12} (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (2.2 1.2 2.2)
σ_{12} (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.2 1.1 2.1)
σ_{12} (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.2 1.1 2.2)
σ_{12} (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 1.2 2.2)
σ_{12} (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.1 1.1 2.1)
σ_{12} (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.1 1.1 2.2)
σ_{12} (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.1 1.2 2.2)
σ_{12} (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 1.2 2.2)

7.10. $(1\ 2\ 3)$
$(2\ 2\ 1)$

σ_{13} (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (1.2 2.2 1.2)
σ_{13} (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 2.2)
σ_{13} (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.2 2.1)
σ_{13} (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 2.2)
σ_{13} (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.2 2.1)
σ_{13} (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.1 2.1)
σ_{13} (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 2.2)
σ_{13} (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.2 2.1)
σ_{13} (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.1 2.1)
σ_{13} (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.1 2.3 2.1)

7.11. $(1\ 2\ 3)$
$(2\ 2\ 2)$

σ_{14} (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 2.2 2.2)

σ_{14} (3.2 2.2 1.2) → (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.2 2.2 1.3) → (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.2 2.3 1.3) → (2.2 2.2 2.2)
σ_{14} (3.3 2.3 1.3) → (2.2 2.2 2.2)

7.12. (1 2 3)
(2 2 3)

σ_{15} (3.1 2.1 1.1) → (3.2 2.2 2.2)
σ_{15} (3.1 2.1 1.2) → (3.2 2.2 2.2)
σ_{15} (3.1 2.1 1.3) → (3.2 2.2 2.3)
σ_{15} (3.1 2.2 1.2) → (3.2 2.2 2.2)
σ_{15} (3.1 2.2 1.3) → (3.2 2.2 2.3)
σ_{15} (3.1 2.3 1.3) → (3.2 2.3 2.3)
σ_{15} (3.2 2.2 1.2) → (3.2 2.2 2.2)
σ_{15} (3.2 2.2 1.3) → (3.2 2.2 2.3)
σ_{15} (3.2 2.3 1.3) → (3.2 2.3 2.3)
σ_{15} (3.3 2.3 1.3) → (3.3 2.3 2.3)

7.13. (1 2 3)
(2 3 2)

σ_{16} (3.1 2.1 1.1) → (2.2 3.2 2.2)
σ_{16} (3.1 2.1 1.2) → (2.2 3.2 2.3)
σ_{16} (3.1 2.1 1.3) → (2.2 3.2 2.2)
σ_{16} (3.1 2.2 1.2) → (2.2 3.3 2.3)
σ_{16} (3.1 2.2 1.3) → (2.2 3.3 2.2)
σ_{16} (3.1 2.3 1.3) → (2.2 3.2 2.2)
σ_{16} (3.2 2.2 1.2) → (2.3 3.3 2.3)
σ_{16} (3.2 2.2 1.3) → (2.3 3.3 2.2)
σ_{16} (3.2 2.3 1.3) → (2.3 3.2 2.2)
σ_{16} (3.3 2.3 1.3) → (2.2 3.2 2.2)

7.14. (1 2 3)
(2 3 3)

σ_{17} (3.1 2.1 1.1) → (3.2 3.2 2.2)
σ_{17} (3.1 2.1 1.2) → (3.2 3.2 2.3)
σ_{17} (3.1 2.1 1.3) → (3.2 3.2 2.3)
σ_{17} (3.1 2.2 1.2) → (3.2 3.3 2.3)
σ_{17} (3.1 2.2 1.3) → (3.2 3.3 2.3)
σ_{17} (3.1 2.3 1.3) → (3.2 3.3 2.3)
σ_{17} (3.2 2.2 1.2) → (3.3 3.3 2.3)
σ_{17} (3.2 2.2 1.3) → (3.3 3.3 2.3)
σ_{17} (3.2 2.3 1.3) → (3.3 3.3 2.3)
σ_{17} (3.3 2.3 1.3) → (3.3 3.3 2.3)

7.15. (1 2 3)
(3 1 1)

σ_{18} (3.1 2.1 1.1) → (1.3 1.3 3.3)
σ_{18} (3.1 2.1 1.2) → (1.3 1.3 3.1)
σ_{18} (3.1 2.1 1.3) → (1.3 1.3 3.1)
σ_{18} (3.1 2.2 1.2) → (1.3 1.1 3.1)
σ_{18} (3.1 2.2 1.3) → (1.3 1.1 3.1)
σ_{18} (3.1 2.3 1.3) → (1.3 1.3 3.1)
σ_{18} (3.2 2.2 1.2) → (1.1 1.1 3.1)
σ_{18} (3.2 2.2 1.3) → (1.1 1.1 3.1)
σ_{18} (3.2 2.3 1.3) → (1.1 1.1 3.1)
σ_{18} (3.3 2.3 1.3) → (1.1 1.1 3.1)

7.16. (1 2 3)
(3 1 3)

σ_{19} (3.1 2.1 1.1) → (3.3 1.3 3.3)
σ_{19} (3.1 2.1 1.2) → (3.3 1.3 3.1)
σ_{19} (3.1 2.1 1.3) → (3.3 1.3 3.3)
σ_{19} (3.1 2.2 1.2) → (3.3 1.1 3.1)
σ_{19} (3.1 2.2 1.3) → (3.3 1.1 3.3)
σ_{19} (3.1 2.3 1.3) → (3.3 1.3 3.3)

σ_{19} (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.1 3.1)
σ_{19} (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.1 3.3)
σ_{19} (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.3 3.3)
σ_{19} (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 1.3 3.3)

7.17. (1 2 3)
(3 2 2)

σ_{20} (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (2.3 2.3 3.3)
σ_{20} (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (2.3 2.3 3.2)
σ_{20} (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (2.3 2.3 3.2)
σ_{20} (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.3 2.2 3.2)
σ_{20} (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.3 2.2 3.2)
σ_{20} (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.3 2.2 3.2)
σ_{20} (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.2 2.2 3.2)
σ_{20} (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.2 2.2 3.2)
σ_{20} (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 2.2 3.2)
σ_{20} (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 2.2 3.2)

7.18. (1 2 3)
(3 2 3)

σ_{21} (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (3.3 2.3 3.3)
σ_{21} (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (3.3 2.3 3.2)
σ_{21} (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (3.3 2.3 3.3)
σ_{21} (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.3 2.2 3.2)
σ_{21} (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.3 2.2 3.3)
σ_{21} (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 2.3 3.3)
σ_{21} (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.2 2.2 3.2)
σ_{21} (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.2 2.2 3.3)
σ_{21}(3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.2 2.3 3.3)
σ_{21} (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 2.3 3.3)

7.19. (1 2 3)
(3 3 1)

σ_{22} (3.1 2.1 1.1) → (1.3 3.3 3.3)
σ_{22} (3.1 2.1 1.2) → (1.3 3.3 3.3)
σ_{22} (3.1 2.1 1.3) → (1.3 3.3 3.1)
σ_{22} (3.1 2.2 1.2) → (1.3 3.3 3.3)
σ_{22} (3.1 2.2 1.3) → (1.3 3.3 3.1)
σ_{22} (3.1 2.3 1.3) → (1.3 3.1 3.1)
σ_{22} (3.2 2.2 1.2) → (1.3 3.3 3.3)
σ_{22} (3.2 2.2 1.3) → (1.3 3.3 3.1)
σ_{22} (3.2 2.3 1.3) → (1.3 3.1 3.1)
σ_{22} (3.3 2.3 1.3) → (1.1 3.1 3.1)

7.20. (1 2 3)
(3 3 2)

σ_{23} (3.1 2.1 1.1) → (2.3 3.3 3.3)
σ_{23} (3.1 2.1 1.2) → (2.3 3.3 3.3)
σ_{23} (3.1 2.1 1.3) → (2.3 3.3 3.2)
σ_{23} (3.1 2.2 1.2) → (2.3 3.3 3.3)
σ_{23} (3.1 2.2 1.3) → (2.3 3.3 3.2)
σ_{23} (3.1 2.3 1.3) → (2.3 3.2 3.2)
σ_{23} (3.2 2.2 1.2) → (2.3 3.3 33)
σ_{23} (3.2 2.2 1.3) → (2.3 3.3 3.2)
σ_{23} (3.2 2.3 1.3) → (2.3 3.2 3.2)
σ_{23} (3.3 2.3 1.3) → (2.2 3.2 3.2)

7.21. (1 2 3)
(3 3 3)

σ_{24} (3.1 2.1 1.1) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.1 2.1 1.2) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.1 2.1 1.3) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.1 2.2 1.2) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.1 2.2 1.3) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.1 2.3 1.3) → (3.3 2.3 1.3)

σ_{24} (3.2 2.2 1.2) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.2 2.2 1.3) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.2 2.3 1.3) → (3.3 2.3 1.3)
σ_{24} (3.3 2.3 1.3) → (3.3 2.3 1.3)

8. Semiotische Loops

Wie wir gezeigt haben, bilden die semiotischen Quasigruppen (PZ, $\circ_1$), (PZ, $\circ_2$) und (PZ, $\circ_3$) abelsche Gruppen, die Quasigruppen (PZ, $\circ_4$), (PZ, $\circ_5$) und (PZ, $\circ_6$) Loops, während (PZ, $\circ_1$) bis (PZ, $\circ_{12}$) "gewöhnliche" Quasigruppen sind. Da alle abelschen Gruppen ebenfalls Loops sind, prüfen wir im folgenden, ob sie auch Moufang-Loops sind, d.h. ob sie die drei Moufang-Identitäten (vgl. z.B. Goodaire, May und Raman 1999) erfüllen:

$((x \circ y)x)z = x(y(x \circ z))$ linke Moufang-Identität
$((x \circ y)z)y = x(y(z \circ y))$ rechte Moufang-Identität
$(x \circ y)(z \circ x) = (x(y \circ z))x$ mittlere Moufang-Identität

Wenn wir x = 1, y = 2 und z = 3 setzen, erhalten wir für (PZ, $\circ_1$), (PZ, $\circ_2$) und (PZ, $\circ_3$): $((1 \circ 2)1)3 = 1 = 1(2(1 \circ 3))$; $((1 \circ 2)3)2 = 2 = 1(2(3 \circ 2))$; $(1 \circ 2)(3 \circ 1) = 1 = (1(2 \circ 3))1$.

Erfüllt ein Loop ausserdem die Bedingungen

$(x(y \circ x))z = x(y(x \circ z))$ linke Bol-Identität
$((x \circ y)z)y = x((y \circ z)y)$ rechte Bol-Identität,

so heisst er Bolscher Loop (Pflugfelder 1990, S. 112). Wir setzen wieder x = 1, y = 2 und z = 3 und erhalten für (PZ, $\circ_1$), (PZ, $\circ_2$) und (PZ, $\circ_3$): $(1(2 \circ 1))3 = 1 = 1(2(1 \circ 3))$; $((1 \circ 2)3)2 = 2 = 1((2 \circ 3)2)$.

Ein Bolscher Loop (B, $\circ$), der 1. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ erfüllt und 2. für den gilt $x \to x \circ x$ ist eine Bijektion, heisst Bruckscher Loop (Pflugfelder 1990, S. 120). Hierzu brauchen wir nur 1. zu zeigen: Wir setzen wieder x = 1, y = 2 und z = 3 und erhalten für (PZ, $\circ_1$), (PZ, $\circ_2$) und (PZ, $\circ_3$): $(1 \circ 2)^{-1} = 1^{-1} \circ 2^{-1} = 3$; $(1 \circ 3)^{-1} = 1^{-1} \circ 3^{-1} = 2$; $(2 \circ 3)^{-1} = 2^{-1} \circ 3^{-1} = 1$.

Semiotische Gruppen sind also zugleich Moufangsch, Bolsch und Brucksch.

Ferner können wir feststellen, dass die kommutativen Quasigruppen (PZ, $\circ_4$), (PZ, $\circ_5$) und (PZ, $\circ_6$) totalsymmetrisch sind, da sie die Bedingungen 1. $x \circ y = y \circ x$ und 2. $x(x \circ y) = y$ erfüllen. Da 1. klar ist, zeigen wir 2.: Für (PZ, $\circ_4$) bis (PZ, $\circ_6$) bekommen wir dann: $1(1 \circ 2) = 2$, $2(2 \circ 3) = 3$, $3(3 \circ 2) = 2$, $3(3 \circ 1) = 1$, usw. Es handelt sich bei den kommutativen Quasigruppen also um Steiner-Loops (Pflugfelder 1990, S. 123).

9. Quasigruppentheoretische Konstruktionen

Die für die mathematische Semiotik wichtige Frage, ob es möglich sei, mittels kommutativer oder sogar nichtkommutativer Quasigruppen, also mit Loops, welche nicht Moufangsch sind, oder sogar mit Nicht-Loop-Gebilden, ebenfalls Zeichenklassen und Realitätsthematiken zu konstruieren, musste in Toth (2008a, S. 46) offen bleiben. Immerhin konnte festgehalten werden, dass alle semiotischen Quasigruppen, welche nicht Gruppen sind, nicht-assoziativ sind, ferner gibt es natürlich kommutative und nichtkommutative Quasigruppen, was also an die entsprechenden Verhältnisse in den Zahlbereichen erinnert:

Zahlbereiche	**strukturelle Eigenschaften**		**Gruppoide**
R, **C**	kommutativ	assoziativ	(abelsche) Gruppen
H	nichtkommutativ	assoziativ	?
O	nichtkommutativ	nichtassoziativ	nichtkommutative
			Quasigruppen
?	kommutativ	nichtassoziativ	kommutative Quasigruppen

So entsprechen also die Moufang-Loops qua Gruppen den Körpern der reellen und der komplexen Zahlen. Eine gruppentheoretische Korrespondenz der Quaternionen könnten die nicht-abelschen Gruppen sein. Mit den Oktonionen korrespondieren die nichtkommutativen Quasigruppen, die keine Loops darstellen. Doch welcher Zahlbereich entspricht den kommutativen Quasigruppen (Loops)?

Obwohl diese Zusammenhänge weiter offen bleiben müssen, hat die vorliegende Studie folgende Zusammenhänge ergeben, die wir in Form von drei semiotischen Theoremen festhalten wollen:

Theorem 1: Die symplerotischen quasigruppentheoretischen Operationen σ_4 - σ_{12} erzeugen die semiotischen Sinnklassen, d.h. die Menge der 473 semiotischen Relationen, bei denen weder die semiotische inklusive Ordnung noch die paarweise Verschiedenheit der Relata gefordert wird.

Theorem 2: Die symplerotischen gruppentheoretischen Operationen σ_1 - σ_3 erzeugen die semiotischen Bedeutungsklassen, d.h. die Menge der 27 semiotischen Relationen, bei denen die paarweise Verschiedenheit der Relata, nicht aber die semiotische inklusive Ordnung gefordert wird.

Theorem 3: Die symplerotische gruppentheoretische Operation σ_2 erzeugt die 10 Zeichenklassen, bei denen sowohl die paarweise Verschiedenheit der Relata als auch die semiotische inklusive Ordnung gefordert wird.

Semiotische Anwendung im Sinne der gruppentheoretischen Theore dyadischer Verknüpfungen bzw. Zuordnungen von semiotischen Elementen (Primzeichen, Subzeichen, Zeichenrümpfen, Zeichenklassen, Realitätsthematiken, Trichotomischen Triaden etc.) dürfte damit selber ebenso anwendbar als auch weiterhin theoretisch ausbaubar sein.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Bense, Max/Walter, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Bogarin, Jorge, Symplerosis. Über komplementäre Zeichen und Realitäten. In: Semiosis 65-68, 1992, S. 87-94

Gfesser, Karl, Bemerkungen zum "Zeichenband". In: Walther, Elisabeth und Bayer, Udo (Hrsg.), Zeichen von Zeichen für Zeichen. Baden-Baden 1990, S. 129-141

Goodaire, Edgar G./May, Sean/Raman, Maitreyi, The Moufang Loops of Order Less Than 64. New York 1999

Lindner, Charles C./Evans, Trevor, Finite Embedding Theorems for Partial Desings and Algebras. Québec 1977

Pflugfelder, Hala O., Quasigroups and Loops. Berlin 1990

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007 (2. Aufl. 2008a)

Toth, Alfred, Gruppentheoretische Semiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Gruppenth.%20Sem..pdf (2008b)

9.8.2009